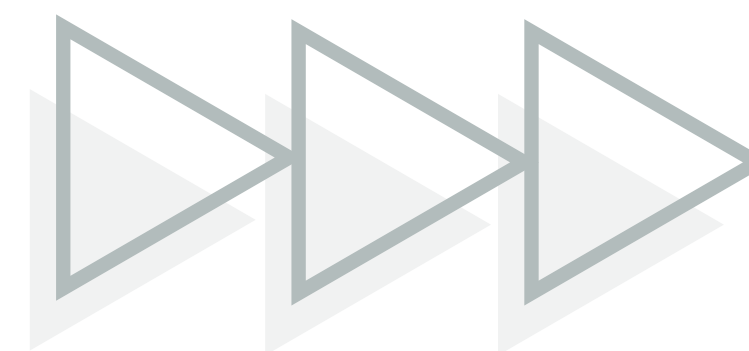




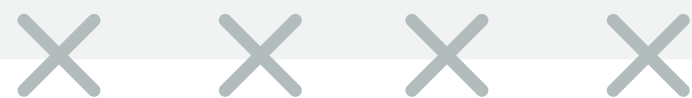
高斯分布抽樣估計實驗分析

B1328042 吳宜鍼



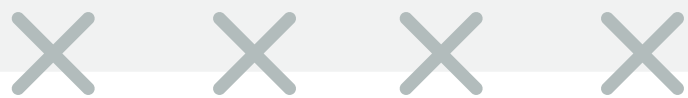
單變數高斯

透過程式模擬，從已知母體中進行多次抽樣，分別使用最大概似估計（MLE）與無偏估計（Unbiased Estimation）來估計平均數與變異數，並比較它們與真實值的差異。



實驗設計

- 母體設定：常態分布 $N(\mu=50, \sigma^2=25)$ 。
- 抽樣方式：每輪抽取 100 筆樣本，共進行 10 輪。
- 估計方法：
 1. 平均數估計 μ
 2. 變異數估計(包含MLE、無偏估計)
- 誤差衡量：估計值與真實值的絕對差。



數 值 結 果

- 測試10輪的結果（ 每輪取100個樣本 ）
- 母數為（ $\mu=50, \sigma^2=25$ ）

輪次	樣本數	平均數估計	變異數估計(MLE, N分母)	變異數估計(無偏, N-1分母)
1	100	50.299040	25.395665	25.652187
2	100	50.410065	26.763395	27.033732
3	100	49.703839	22.657725	22.886591
4	100	49.016016	21.592523	21.810630
5	100	49.937179	26.893207	27.164855
6	100	48.985345	25.856065	26.117237
7	100	49.325252	25.150875	25.404924
8	100	49.382004	22.167096	22.391006
9	100	49.859004	21.620970	21.839363
10	100	50.819421	22.097617	22.320826

數值結果

- 平均估計數、變異數估計：由10輪的平均而來
- 其中變異數估計有分為MLE、無偏
- 絕對誤差：個估計值與真實值的誤差

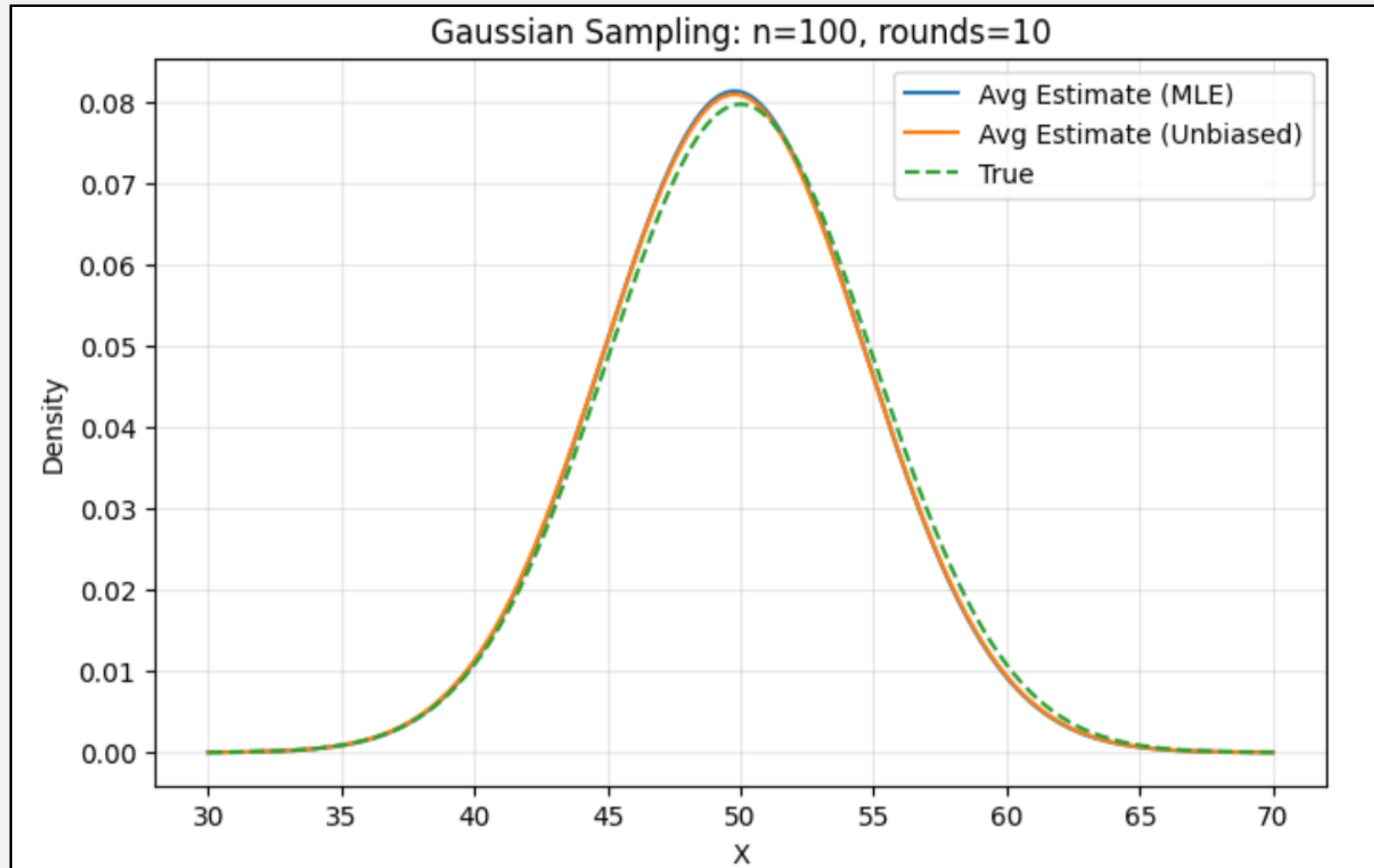
指標	估計值	真實值	絕對誤差
平均數估計 (各輪平均)	49.773716	50	0.226284
變異數估計(MLE) (各輪平均)	24.019514	25	0.980486
變異數估計(無偏) (各輪平均)	24.262135	25	0.737865

結果分析：

1. 平均數估計大致落在49–51之間，接近真實值50幾乎無偏，但存在隨機波動。
2. 變異數估計則落在 21–27 之間，上下浮動較大。
3. MLE系統性低估，偏差約為 $(n-1)/n$ ；無偏估計透過除以 $n-1$ 矯正，效果更佳。

數值結果

- x軸：隨機變數 X 的可能取值
- y軸：機率密度值
- 藍線： $(\mu=49.773716, \sigma^2=24.019514)$ / 橘線： $(\mu=49.773716, \sigma^2=24.262135)$ / 綠虛線： $(\mu=50, \sigma^2=25)$

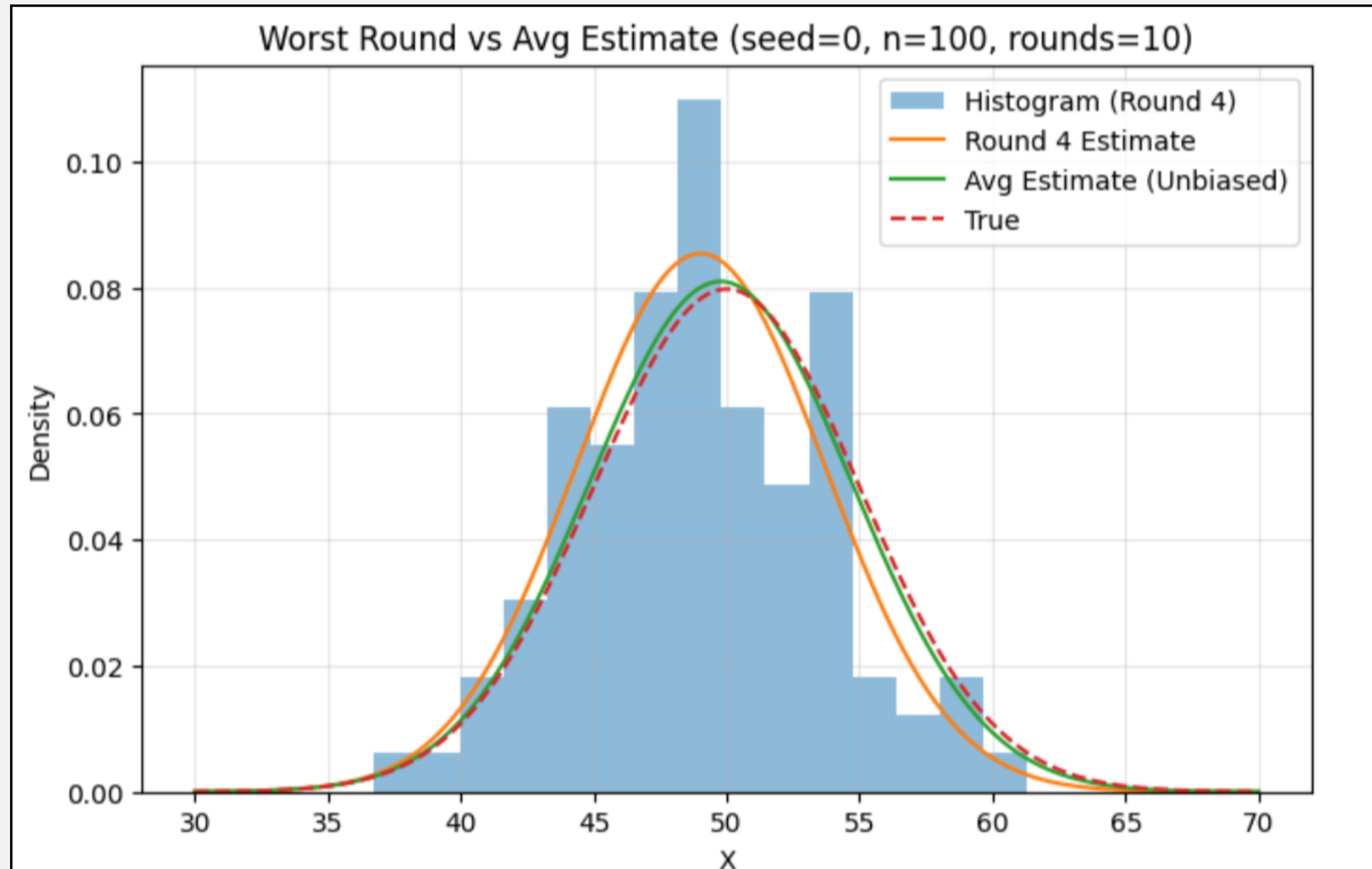


結果分析：

1. 三條曲線高度重疊，表示在樣本數足夠且多輪平均的情況下，估計結果能很好逼近真實分布。
2. 藍線(由10輪MLE 平均參數繪製)在峰值處略高，整體形狀偏高、窄，符合理論上MLE估計會偏低。

數值結果

- 取單輪最差結果（第四輪）繪製其直方圖及估計分佈圖（橘線）
- 單輪最差估計分佈（橘線）v.s 10輪平均估計分佈，無偏（綠線）v.s 真實分佈（紅虛線）

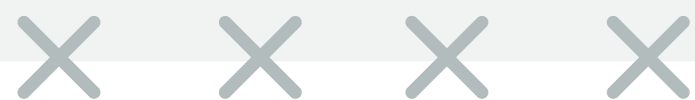


結果分析：

- 1.由直方圖及其曲線可以觀察到單次抽樣的真實樣貌，即其隨機性。
- 2.單輪直方圖與估計曲線（橙線）明顯與真實值有偏差。
- 3.但多輪平均估計（綠線）則回到接近真實分布，顯示**大數法則**：抽樣次數或重複實驗增加時，估計值會收斂於真實值。

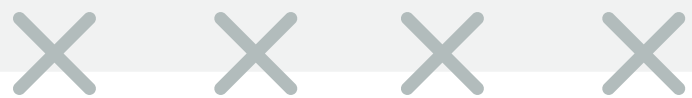
雙變數高斯

評估在不同相關係數 ρ (0、0.5、-0.5、0.9) 下，利用抽樣估計雙變數高斯分布之均值向量 μ 與共變異數矩陣 Σ 的準確度，並比較 MLE 與 無偏估計的表現；同時用圖形檢查資料與母體分布的一致性。



實驗設計

- 參數： $\mu=[50,30]$ ， $\sigma_1=5$ ， $\sigma_2=3 \Rightarrow \sigma_1\sigma_2=15$ （理論協方差 $=\rho \times 15$ ）。
- $\rho \in \{0, 0.5, -0.5, 0.9\}$
- 抽樣方式(每個 ρ)：每輪抽取 100 筆樣本，共進行 50 輪。
- 每輪計算 $\hat{\mu}$ 、 $\Sigma(\text{MLE}, \text{ddof}=0)$ 、 $\Sigma(\text{Unb}, \text{ddof}=1)$ ；最後取跨輪平均並與真值比較。



數值結果

- 每一輪隨機抽樣後，估計出來的參數數值（一共50次，但只顯示前5次）。
- ρ 設定為 0，代表 X_1 和 X_2 沒有相關。
- $\hat{\mu}$ 這一輪抽到的樣本中心/ $\hat{\Sigma}$ 這一輪樣本的分布形狀與方向

逐輪結果（前5列）：

	ρ	輪次	$\hat{\mu}$
0	0.0	1	[49.995211590977135, 30.42833600426067]
1	0.0	2	[49.28460833127103, 29.66114809992065]
2	0.0	3	[49.43821238617859, 29.690586981106286]
3	0.0	4	[49.48719030287237, 29.532039077217703]
4	0.0	5	[50.1606351860049, 30.310673934406374]

$\hat{\Sigma}(\text{MLE})$

0	[[26.109948533849543, -0.37380440285443584], [...
1	[[23.216103618186903, -1.176325952415573], [-1...
2	[[27.02924643897474, 1.3775971687495103], [1.3...
3	[[21.07132905248185, -0.22722696860471428], [-...
4	[[20.46528103213168, -0.9468013459934294], [-0...

$\hat{\Sigma}(\text{Unbiased})$

0	[[26.373685387726812, -0.37758020490347055], [...
1	[[23.45060971534031, -1.188208032743003], [-1....
2	[[27.30226913027752, 1.3915122916661722], [1.3...
3	[[21.28417076008268, -0.2295221905098124], [-0...
4	[[20.672001042557252, -0.956364995952959], [-0...

數值結果

- $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\Sigma}$ (MLE)、 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased)：皆是平均50輪的結果（ $\rho = 0$ ）
- 平均 $\hat{\mu}$ 誤差：[0.11659445 0.04064565]
- 平均 $\hat{\Sigma}$ (MLE) 誤差：[[0.62365725 0.09788002] [0.09788002 0.38465422]]
- 平均 $\hat{\Sigma}$ (無偏) 誤差：[[0.37743157 0.09886871] [0.09886871 0.29763053]]

```
ρ = 0.0
平均  $\hat{\mu}$ : [49.88340555 29.95935435] 真實  $\mu$ : [50 30] |誤差|: [0.11659445 0.04064565]
平均  $\hat{\Sigma}$  (MLE):
[[24.37634275 -0.09788002]
 [-0.09788002 8.61534578]]
平均  $\hat{\Sigma}$  (Unbiased):
[[24.62256843 -0.09886871]
 [-0.09886871 8.70236947]]
真實  $\Sigma$ :
[[25 0]
 [0 9]]
|誤差  $\hat{\Sigma}$  (MLE)|:
[[0.62365725 0.09788002]
 [0.09788002 0.38465422]]
|誤差  $\hat{\Sigma}$  (Unbiased)|:
[[0.37743157 0.09886871]
 [0.09886871 0.29763053]]
```

結果分析：

1. 相較單次抽樣，平均的數值較接近真實值，符合大數法則
2. $\hat{\mu}$ 幾乎無偏，因為數學上 $E[\hat{\mu}] = \mu$ 。
3. $\Sigma(\text{MLE})$ 與 $\Sigma(\text{Unbiased})$ 都接近真實 Σ ，但 無偏估計比 MLE 更貼近真實值。
4. 可將 $\rho = 0$ 當作基準情境，和其他 ρ (0.5, -0.5, 0.9) 比較

數 值 結 果

$\rho = 0.0$

平均 $\hat{\mu}$: [49.88340555 29.95935435] 真實 μ : [50 30] |誤差|: [0.11659445 0.04064565]

平均 $\hat{\Sigma}$ (MLE):

[[24.37634275 -0.09788002]
[-0.09788002 8.61534578]]

平均 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased):

[[24.62256843 -0.09886871]
[-0.09886871 8.70236947]]

真實 Σ :

[[25 0]
[0 9]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (MLE)|:

[[0.62365725 0.09788002]
[0.09788002 0.38465422]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased)|:

[[0.37743157 0.09886871]
[0.09886871 0.29763053]]

$\rho = 0.5$

平均 $\hat{\mu}$: [49.97073023 30.04027861] 真實 μ : [50 30] |誤差|: [0.02926977 0.04027861]

平均 $\hat{\Sigma}$ (MLE):

[[24.69354612 7.28492191]
[7.28492191 8.6481156]]

平均 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased):

[[24.94297588 7.35850698]
[7.35850698 8.7354703]]

真實 Σ :

[[25. 7.5]
[7.5 9.]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (MLE)|:

[[0.30645388 0.21507809]
[0.21507809 0.3518844]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased)|:

[[0.05702412 0.14149302]
[0.14149302 0.2645297]]

數 值 結 果

$\rho = -0.5$

平均 $\hat{\mu}$: [49.96352051 29.97259701] 真實 μ : [50 30] |誤差|: [0.03647949 0.02740299]

平均 $\hat{\Sigma}$ (MLE):

[[24.97218682 -7.81348191]

[-7.81348191 8.9960897]]

平均 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased):

[[25.22443113 -7.89240597]

[-7.89240597 9.08695929]]

真實 Σ :

[[25. -7.5]

[-7.5 9.]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (MLE)|:

[[0.02781318 0.31348191]

[0.31348191 0.0039103]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased)|:

[[0.22443113 0.39240597]

[0.39240597 0.08695929]]

$\rho = 0.9$

平均 $\hat{\mu}$: [50.06520428 30.05069081] 真實 μ : [50 30] |誤差|: [0.06520428 0.05069081]

平均 $\hat{\Sigma}$ (MLE):

[[24.97860741 13.34803183]

[13.34803183 8.87214454]]

平均 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased):

[[25.23091658 13.48286043]

[13.48286043 8.96176216]]

真實 Σ :

[[25. 13.5]

[13.5 9.]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (MLE)|:

[[0.02139259 0.15196817]

[0.15196817 0.12785546]]

|誤差 $\hat{\Sigma}$ (Unbiased)|:

[[0.23091658 0.01713957]

[0.01713957 0.03823784]]

結果分析：

1. $\rho = 0$ (獨立情況)

- 平均 $\hat{\mu}$ 誤差 $\approx [0.12, 0.04] \rightarrow$ 幾乎為零，均值估計非常準。
- $\Sigma(\text{MLE})$ 誤差：
 - 方差低估： σ_1^2 誤差 ≈ 0.62 ， σ_2^2 誤差 ≈ 0.38 。
 - 協方差誤差 ≈ 0.10 (真實應該是 0)。
- $\Sigma(\text{Unbiased})$ 誤差：
 - 方差誤差更小 ($\sigma_1^2 \approx 0.38$, $\sigma_2^2 \approx 0.30$)。
 - 協方差誤差與 MLE 差不多。
 - 結論：無偏比 MLE 更接近真實值，尤其在方差估計上。

結果分析：

2. $\rho = 0.5$ (中度正相關)

- 平均 $\hat{\mu}$ 誤差 $\approx [0.03, 0.04] \rightarrow$ 依然非常準確。
- $\Sigma(\text{MLE})$ 誤差：
 - 方差誤差 $\approx 0.31、0.35$ 。
 - 協方差誤差 ≈ 0.22 。
- $\Sigma(\text{Unbiased})$ 誤差：
 - 方差誤差顯著縮小 ($0.06、0.26$)。
 - 協方差誤差 ≈ 0.14 ，比 MLE 小。
 - 結論：在有正相關時，無偏估計的優勢更明顯，方差與協方差都更接近真實值。

結果分析：

3. $\rho = -0.5$ (中度負相關)

- 平均 $\hat{\mu}$ 誤差 $\approx [0.04, 0.03] \rightarrow$ 幾乎無誤差。
- $\Sigma(\text{MLE})$ 誤差：
 - 方差誤差很小 (0.03 與 0.004)。
 - 協方差誤差 ≈ 0.31 (相對明顯)。
- $\Sigma(\text{Unbiased})$ 誤差：
 - 方差誤差稍大 (0.22 與 0.09)。
 - 協方差誤差 ≈ 0.39 ，比 MLE 更差。
 - 結論：在負相關情境下，MLE 的表現反而比無偏更好，特別是方差估計更準。

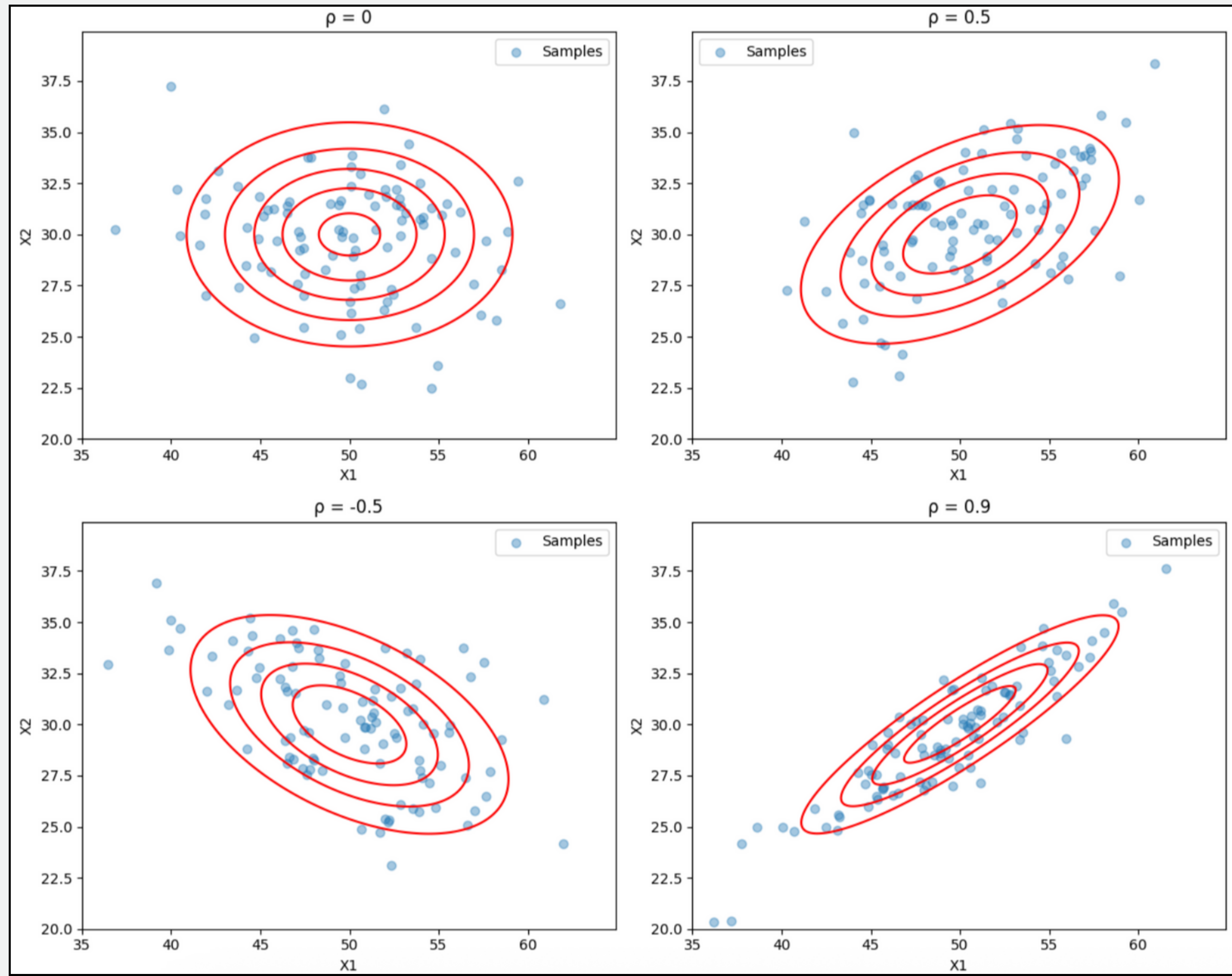
結果分析：

4. $\rho = 0.9$ (高度正相關)

- 平均 $\hat{\mu}$ 誤差 $\approx [0.07, 0.05] \rightarrow$ 仍然準確。
- $\Sigma(\text{MLE})$ 誤差：
 - 方差誤差極小 (≈ 0.02 與 0.13)。
 - 協方差誤差 ≈ 0.15 。
- $\Sigma(\text{Unbiased})$ 誤差：
 - 方差誤差較大 (0.23 與 0.04)。
 - 協方差誤差極小 (≈ 0.017)。
 - 結論：在高度相關情況下，MLE 對方差估計較好，但無偏在協方差估計上更勝一籌。

數值結果

- 樣本散點 (藍點) 與真實分布的等高線 (紅線)

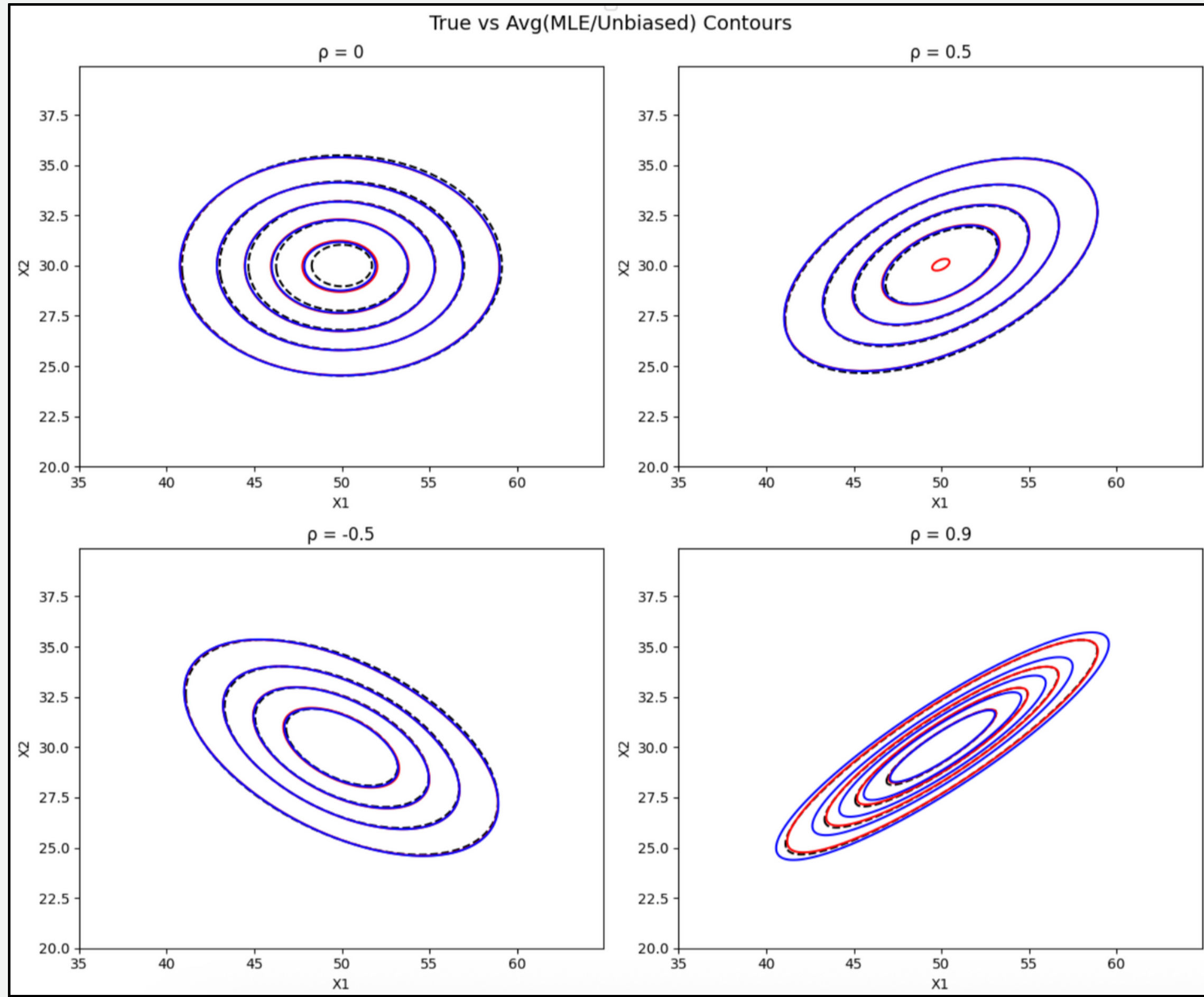


結果分析：

1. 每個 subplot 中，藍點雖有隨機性，但大致落在紅色等高線的高密度區域內。
2. ρ 控制協方差： ρ 越大，橢圓越細長，偏斜方向越明顯。
3. $\rho = 0$ 時協方差為 0，圖形對稱
4. $\rho \neq 0$ 時，橢圓傾斜，正相關 $\rightarrow$ 右上斜，負相關 $\rightarrow$ 左下斜。

數值結果

- 真實分布 (黑色虛線) v.s 平均 MLE (紅色) v.s 平均無偏估計 (藍色) 的等高線



結果分析：

1. $\rho = 0$ （無相關）

- 三條等高線幾乎完全重疊，差異極小。
- 說明在變數獨立情況下，MLE 與無偏估計都能非常準確地估計出真實的協方差矩陣。

2. $\rho = 0.5$ （中度正相關）

- 黑色虛線（真實）與藍色（無偏）幾乎一致。
- 紅色（MLE）稍微比真實分布窄一點，表示在有限樣本下 MLE 低估了變異。
- 符合理論：MLE 對協方差有偏，而無偏修正後更接近真實值。

結果分析：

3. $\rho = -0.5$ （中度負相關）

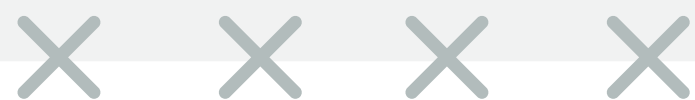
- 黑色虛線、藍色與紅色等高線仍大致重合。
- 可以觀察到藍色（無偏）比紅色（MLE）更貼近黑色。
- 顯示無偏估計在正、負相關情況下都能提供更準確的協方差估計。

4. $\rho = 0.9$ （高度正相關）

- 分布非常狹長。
- 紅色（MLE）相比黑色虛線稍微縮小，顯示 MLE 有低估的現象。
- 藍色（無偏）輪廓較貼近真實分布，誤差更小。
- 但由於樣本有限，仍然可見些微偏差。

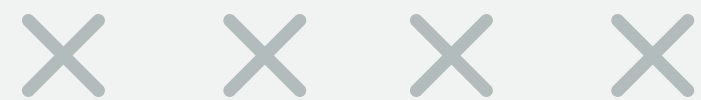
多變數高斯

以三維高斯 $N(\mu, \Sigma)$ 為對象，固定 $\rho=0.6$ 、抽樣輪數 50，分別以 $n \in \{10, 30, 100\}$ 的單輪樣本數進行重複抽樣與估計。比較「平均向量」與「共變異數矩陣」在 MLE 與無偏估計兩種定義下的誤差，並用二維投影橢球圖直觀對比「真實 vs 估計」。



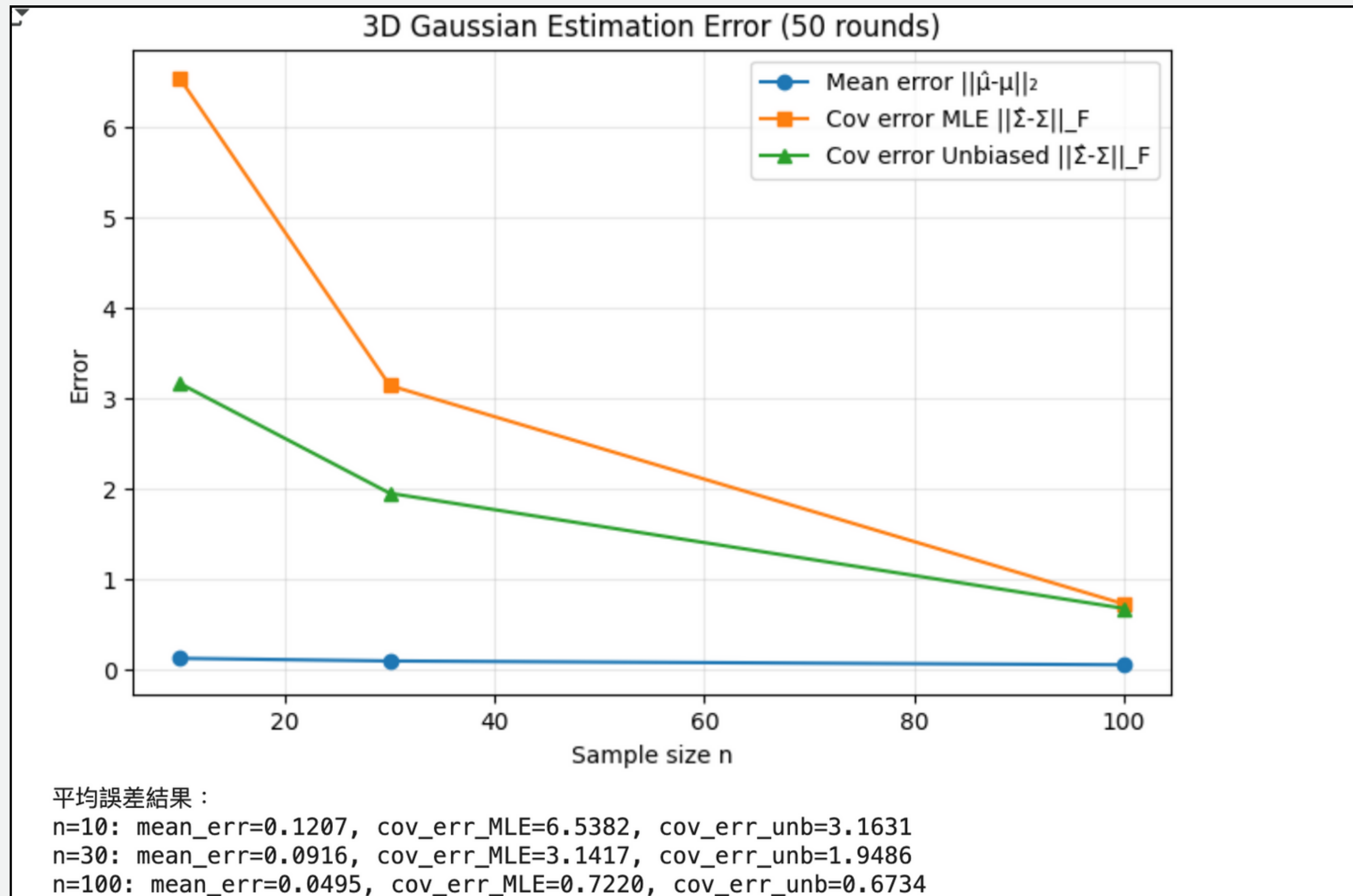
實驗設計

- 單輪樣本數 $n \in \{10, 30, 100\}$; 輪數 $R=50$ 。
- 每輪：抽樣 n 筆，算 $\mu^{\wedge}$, Σ^{MLE} , Σ^{unb} 。
- 跨輪平均： $\mu, \Sigma^{\text{MLE}}, \Sigma^{\text{unb}}$ 。
- 指標：向量誤差 $\|\mu^{-} - \mu\|_2$
矩陣誤差 $\|\Sigma^{-} - \Sigma\|_F$



數值結果

- 藍線：衡量估計出來的「平均向量」 $\mu^{\wedge}$ 和真實母數 μ 的差距。
- 橘線：衡量用MLE得到的協方差矩陣 $\Sigma^{\wedge}\text{MLE}$ 和真實母數 Σ 的差距。
- 綠線：衡量用無偏估計得到的協方差矩陣 $\Sigma^{\wedge}\text{unb}$ 和真實母數 Σ 的差距。



結果分析：

1. 藍線幾乎貼近 0，且隨 n 增加略降：

→ 平均數估計無偏且一致。

2. 橘線明顯高於綠線，尤其小樣本時：

→ MLE 在小樣本低估變異，所以誤差大。

→ n 從10→100，誤差縮小約 9 倍（6.54→0.72）。

3. 綠線全程低於橘線：

→ Bessel 校正把小樣本偏差補回來，小樣本更準。

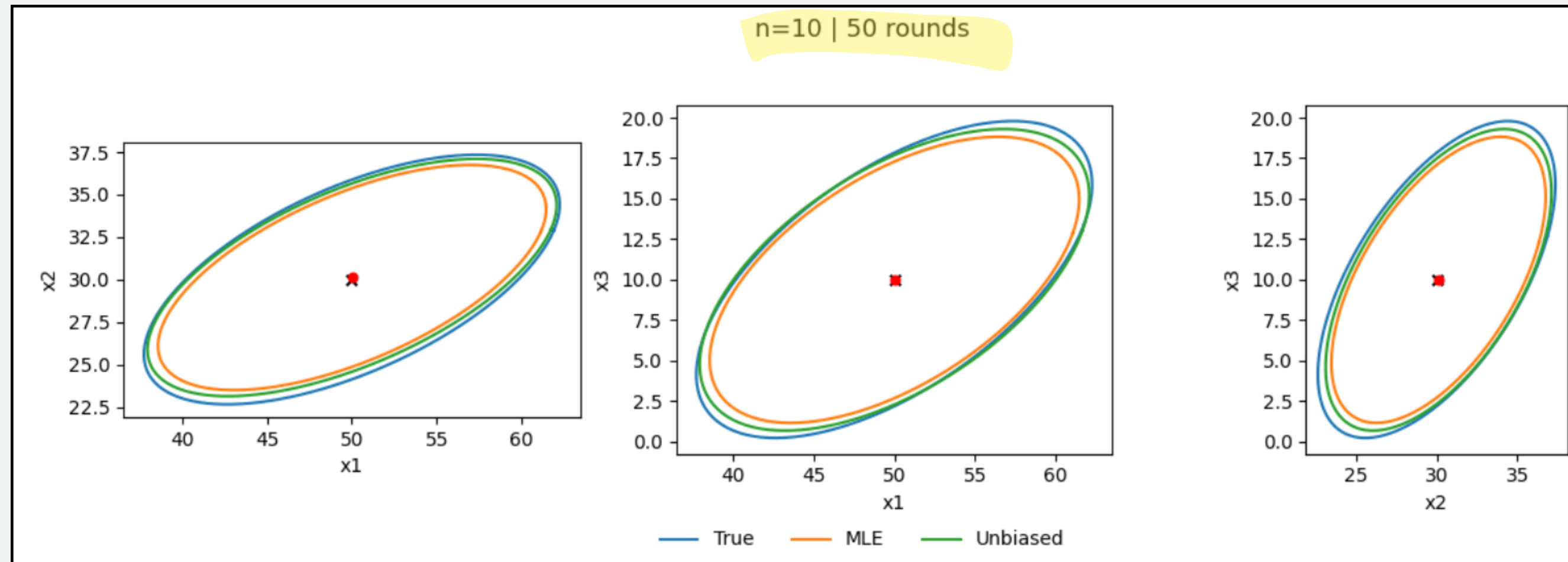
→ n 從10→100 縮小 約 4.7 倍（3.16→0.67）。

數值結果

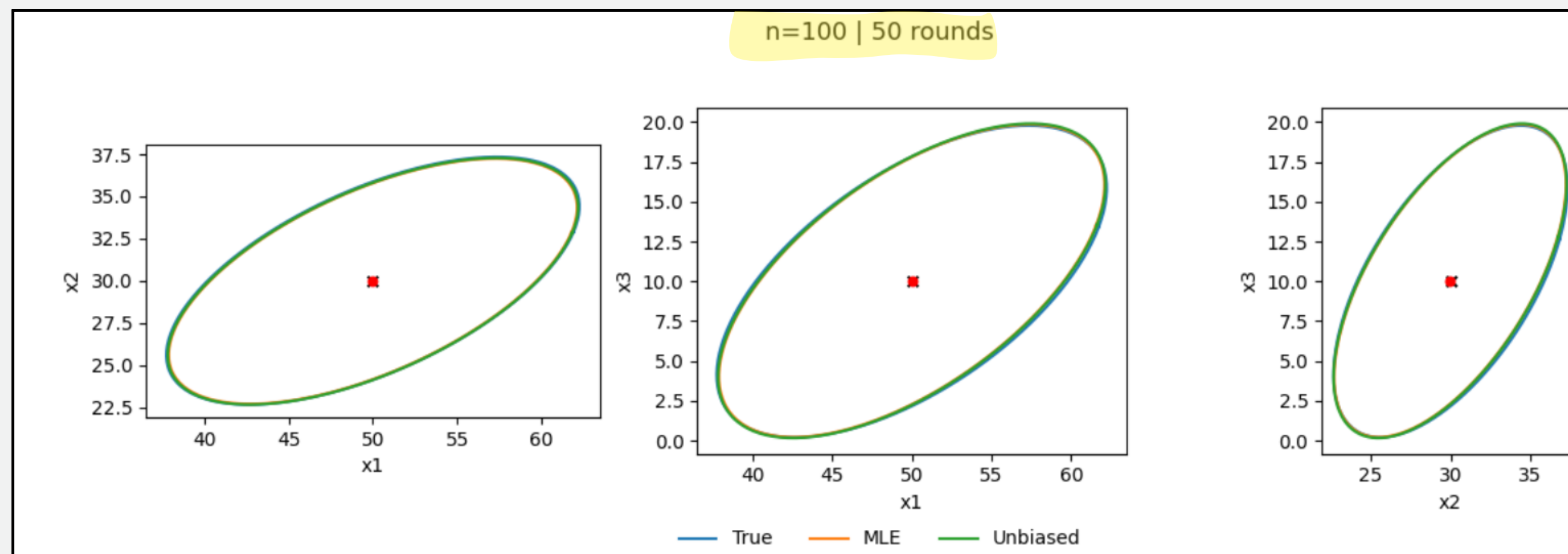
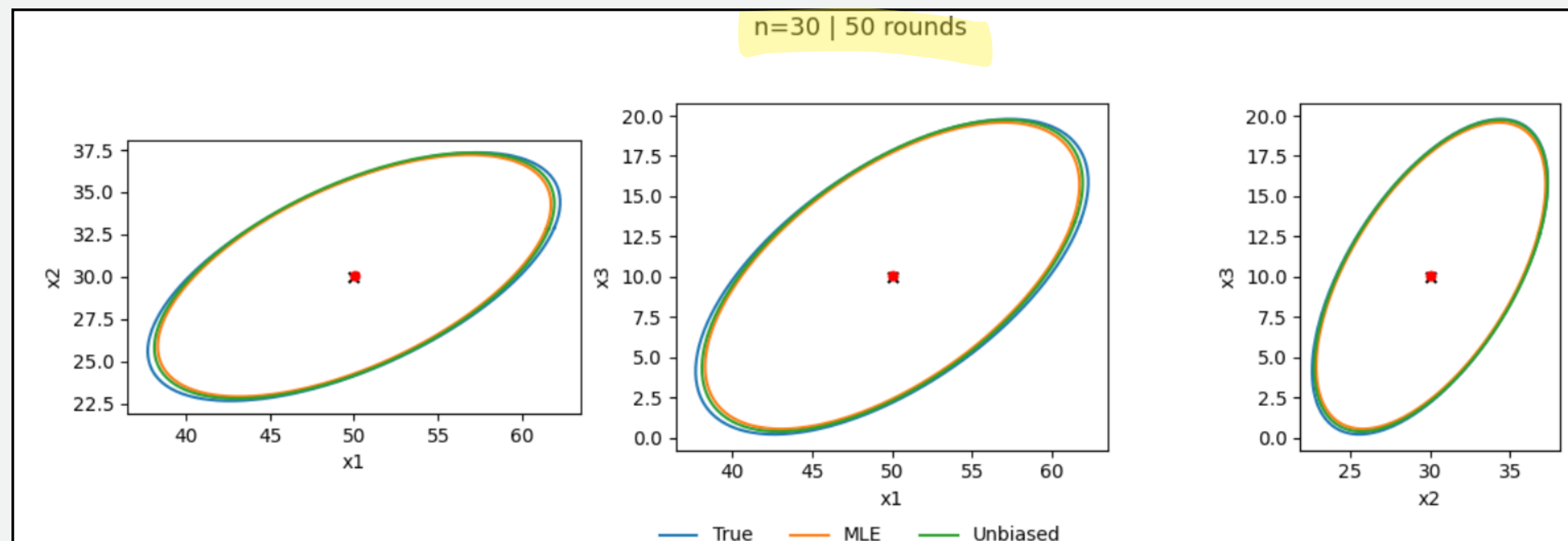
- 藍線 (True)：真實母數 Σ 對應的 95% 信賴橢球。
- 橘線 (MLE)：50 輪抽樣後，平均得到的 MLE 共變異數所對應橢球。
- 綠線 (Unbiased)：50 輪抽樣後，平均得到的無偏共變異數所對應橢球。
- 黑色叉叉 (×)：真實平均數 μ 。
- 紅點 (●)：50 輪抽樣後平均的 $\mu^\wedge$ 。

三張子圖分別為三個二維投影：

- 左：(x1,x2)(x_1, x_2)(x1,x2)
- 中：(x1,x3)(x_1, x_3)(x1,x3)
- 右：(x2,x3)(x_2, x_3)(x2,x3)



數值結果



結果分析：

1. $n=10$ (小樣本)

- 觀察：橘線 (MLE) 明顯比藍線小，代表低估變異數；綠線 (Unbiased) 則明顯更接近藍線。
- 均值 (紅點 vs 黑叉) 幾乎重疊，證明 $\mu^{\wedge}$ 是無偏的。

2. $n=30$ (中樣本)

- 觀察：橘、綠兩條橢球幾乎與藍線重疊，只有細微差異。
- 均值：紅點仍非常接近黑叉。
- 解釋：樣本數增加後，MLE 的偏差已減小，無偏估計與 MLE 差距縮小。

結果分析：

3. $n=100$ (大樣本)

- 觀察：三條橢球 (藍、橘、綠) 幾乎完全重疊，分不出差異。
- 均值：紅點完全貼合黑叉。
- 解釋：當樣本數夠大時，MLE 與無偏估計都一致收斂到真實母數。

綜合結論：

1. 均值估計：三種情況下紅點都貼近黑叉 $\rightarrow \mu^{\wedge}$ 幾乎無偏，且收斂速度快。
2. 共變異數估計：
 - 小樣本時，MLE 偏小且誤差大，無偏估計更貼近真實。
 - 樣本數增加後，MLE 與無偏估計趨於一致。
3. 幾何解釋：橢球縮放與傾斜方向反映了方差大小與變數間相關性。實驗驗證了理論：樣本數越大，估計越接近真實分布。